第 2 期
2018 年 2 月
电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol. 46 No. 2
Feb. 2018

# 模糊线性时序逻辑的可实现性

范艳焕[1,2],李永明[1]
(1. 陕西师范大学计算机科学学院,陕西西安 710062;2. 青海师范大学民师院数学系,青海西宁 810008)

**摘　要：** 模糊线性时序逻辑(fuzzy linear temporal logic)被应用于刻画模糊系统的规范语言,其可实现性(realizability)用于判断满足该时序逻辑公式的开放系统模型是否存在. 模糊线性时序逻辑可实现性和系统合成(synthesis)的基本思想是:给定模糊线性时序逻辑公式,判断是否存在满足该公式的系统. 如果存在,则构造满足该公式的最优系统. 为了检验模糊线性时序逻辑的可实现性,首先引入模糊 Büchi 博弈的定义,作为检验模糊线性时序逻辑公式是否可实现的模型. 其次通过归约的方法,研究模糊 Büchi 博弈的性质(最优无记忆策略存在性. 最后验证模糊线性时序逻辑的可实现性并且给出其系统合成的过程,并说明它们的时间复杂度.

**关键词：** 模糊线性时序逻辑；模糊 Büchi 自动机；可实现性；模糊博弈
**中图分类号：** TP301.2　**文献标识码：** A　**文章编号：** 0372-2112 (2018)02-0341-06
**电子学报 URL：** http://www.ejournal.org.cn　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.02.012

# The Realizability of Fuzzy Linear Temporal Logic

FAN Yan-huan[1,2], LI Yong-ming[1]
(1. *College of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi' an, Shaanxi* 710062, *China*;
2. *Department of Mathematics in National Normal College, Qinghai Normal University, Xining, Qinghai* 810008, *China*)

**Abstract:** FLTL(Fuzzy Linear Temporal Logic) is used as the specification language of fuzzy system, the realizability focuses on judging whether there exists the model for open system satisfying the FLTL formulea . the basic idea of FLTL realizability and synthesis problem is as follow: given a specification, verifying whether there exists a system whose truth value of satisfying the specification is greater than zero. If existed, then we call FLTL formulae described the specification is realizable. First, fuzzy game graph with Büchi objective was proposed, which is used as the model to verify whether FLTL is realizable. Second, we studied the property of fuzzy game graph with Büchi objective by the method of reduction. Last, realizability of fuzzy linear temporal logic was studied and the procedure of system synthesis was given, their time complexities were analyzed.

**Key words:** fuzzy linear temporal logic; fuzzy Büchi automata; realizability; fuzzy game

## 1 引言

模型检测(model checking)[1]技术是用于检验系统是否满足期望的属性. 系统合成[2]是给定属性(可以用时序逻辑刻画),自动地构造一个满足该属性的系统. 在系统合成的过程中,时序逻辑(temporal logic)的可实现性[2,3]的基本思想是已知属性(用时序逻辑公式[4]表示),判断满足属性的系统是否存在. 如果存在,则称时序逻辑公式是可实现的.

经典时序逻辑仅仅刻画具有精确语义的系统属性,在属性信息的获取过程中,比如传感器的稳健性,信息传输过程中的噪音以及读取信息时产生的误差等,这些过程导致获得的系统信息具有不确定性和模糊性. 作为经典时序逻辑的推广,模糊时序逻辑可以有效地刻画含有模糊信息[5]的系统属性,弥补了经典时序逻辑的不足,并且受到了学术界的关注. 例如文献[6 ~ 9]分别提出了模糊时间线性时序逻辑、模糊分支时序逻辑、在任意模糊逻辑下的模糊计算树逻辑和基于广义可能性测度的模糊线性时序逻辑. 本文将研究如何对于含有模糊信息的时序逻辑,构造一个满足此属性

收稿日期:2016-12-14;修回日期:2017-05-14;责任编辑:覃怀银
基金项目:国家自然科学基金(No. 11671244, No. 61261047);教育部博士点基金(No. 20130202110001);青海省自然基金项目:不确定性信息物理融合系统的可靠性计算及智能控制关键技术研究(No. 2014-ZJ-908)

最优的系统.

本文的目的在于研究模糊线性时序逻辑的可实现性和系统合成. 在模糊情况下,反应式系统是否满足属性的答案不再仅仅为"是"(用 1 表示)或"不是"(用 0 表示),而是 0 到 1 区间的一个数值. 因此,模糊线性时序逻辑的可实现性主要目的是验证是否存在一个系统,使得系统满足属性的真值最大. 为了解决模糊线性时序逻辑的可实现性和系统合成问题,在本文中给出含有两个局中人的模糊 Büchi 博弈(fuzzy Büchi game)的定义,其中局中人分别代表系统与环境,动作为原子命题上的模糊集. 并且研究模糊 Büchi 博弈的性质-最优无记忆策略的存在性,讨论判断最优无记忆策略存在的时间复杂度. 最后通过有限个经典博弈[10,11]解决模糊线性时序逻辑的系统合成问题.

## 2 基础知识

模糊集[5]用于刻画隶属范围不是很清楚的集合,形式化定义为:设 $X$ 是一个有限论域,$A:X\to[0,1]$ 是论域 $X$ 上的模糊集. 对任意 $x\in X$,$A(x)$ 表示 $x$ 属于 $A$ 的真值. 若对任意 $x\in X$,$A(x)\in\{0,1\}$,则称 $A$ 为分明集. $\mathrm{Supp}(A)$ 表示模糊集 $A$ 的支集,定义为 $\mathrm{Supp}(A)=\{x\in X:A(x)>0\}$. 对任意的 $\lambda\in(0,1)$,模糊集 $A$ 的 $\lambda$ 截集 $A_\lambda=\{x\in X:A(X)>\lambda\}\subseteq X$. 且对任意的 $\lambda,\mu\in(0,1)$,若 $\lambda\geqslant\mu$,则 $A_\lambda\subseteq A_\mu$. 用 $F(X)$ 表示论域 $X$ 上的所有模糊集. 单位区间$[0,1]$上的一元运算$\neg$ 和二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 定义如下:对任意 $x,y\in[0,1]$,$\neg x=1-x$,$x\vee y=\max\{x,y\}$,$x\wedge y=\min\{x,y\}$. 为叙述方便,在这里先约定一些记号. $\mathbf{N}$ 表示包含 0 的自然数集. $\Sigma$ 为有限字母表,$\Sigma^\omega$ 表示由 $\Sigma$ 上的元素组成的无限字符串.

## 3 模糊线性时序逻辑

模糊线性时序逻辑是经典线性时序逻辑的推广,用于刻画含有模糊信息的命题逻辑,其语法定义如下. 设 $I$ 和 $O$ 分别表示输入符号和输出符号的集合,原子命题的集合 $\mathrm{AP}=I\cup O$. $V$ 是单位区间$[0,1]$的有限子集. $\Sigma=V^{\mathrm{AP}}$表示字母表,$\Sigma_I=V^I$ 和 $\Sigma_O=V^O$ 分别表示输入字母表和输出字母表. 设 $\sigma=\sigma_0\sigma_{1\cdots}\in\Sigma^\omega$,则在 $\sigma$ 上从第 $j$ 个位置开始的无限字符串 $\sigma_{j\cdots}=\sigma_j\sigma_{j+1}\cdots$. 基于原子命题 AP 的模糊线性时序逻辑(简写为 FLTL)的语法[9]定义为 $\varphi::=a|p|\varphi\wedge\Psi|\neg\varphi|\varphi U\psi|X\varphi$,其中 $p\in\mathrm{AP}$,$a\in[0,1]$.

模糊线性时序逻辑的语义为 $\Sigma^\omega$ 上的模糊集,定义如下.

**定义 1**[9] 设 AP 为原子命题的集合,$\varphi$ 是 FCTL 公式,则 $\varphi$ 的语义是 $\Sigma^\omega$ 上的模糊集,表示为 $\|\varphi\|$,归纳定义如下:对任意 $\sigma=\sigma_0\sigma_{1\cdots}\in\Sigma^\omega$,

$\|p\|(\sigma)=\sigma_0(p)$,

$\|a\|(\sigma)=a$,

$\|\neg\varphi\|(\sigma)=1-\|\varphi\|(\sigma)$,

$\|\varphi\wedge\psi\|(\sigma)=\|\varphi\|(\sigma)\wedge\|\psi\|(\sigma)$;

$\|X\varphi\|(\sigma)=\|\varphi\|(\sigma_{1\cdots})$,

$\|\varphi U\psi\|(\sigma)=\sup_{i\geqslant0}(\|\varphi\|(\sigma_{0\cdots})\wedge\|\varphi\|(\sigma_{1\cdots})\wedge\cdots\wedge\|\varphi\|(\sigma_{i-1\cdots})\wedge\|\psi\|(\sigma_{i\cdots}))$.

设 $\varphi$ 是 FCTL 公式,则公式 $\varphi$ 的长度,记作$|\varphi|$,递归定义为$|p|=|a|=1$,$|\varphi_1\wedge\varphi_2|=|\varphi_1|+|\varphi_2|+1$,$|\neg\varphi|=|X\varphi|=|\varphi|+1$,$|\varphi_1U\varphi_2|=|\varphi_1|+|\varphi_2|+1$,其中 $p\in AP$,$a\in[0,1]$.

**定义 2**[12] 模糊 Büchi 自动机是一个五元组 $B=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$,其中 $Q$ 表示非空状态集,$\Sigma$ 表示非空字母表,$q_0$ 表示初始状态,$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to[0,1]$为模糊状态转移函数,$F:Q\to[0,1]$是模糊接收条件. 当 $Q$ 和 $\Sigma$ 为有限集时,称模糊 Büchi 自动机是有限的.

对任意 $\sigma=\sigma_0\sigma_1\cdots\in\Sigma^\omega$,如果无穷状态序列 $\pi=q_0q_1\cdots$,满足 $\delta(q_j,\sigma_j,q_{j+1})>0$,其中 $j=0,1,\cdots$,则称 $\pi$ 是模糊 Büchi 自动机 $B$ 在无穷串 $\sigma$ 上的一条路径. 路径 $\pi$ 中出现无限次的状态集定义为 $\mathrm{Inft}(\pi)=\{q\in Q:\forall i\in N,\exists^\infty j\geqslant i,q_j=q\}$. 如果 $\mathrm{Inft}(\pi)\cap F\neq\varnothing$,则模糊 Büchi 自动机 $B$ 接受路径 $\pi$ 的真值定义为 $\|B\|(\pi)=\wedge_{j=0}^{\infty}\delta(q_j,\sigma_j,q_{j+1})\wedge\wedge_{q\in H}F(q)$,其中 $H=\mathrm{Inft}(\pi)\cap\{q:F(q)>0\}$. 模糊 Büchi 自动机 $B$ 接受 $\sigma\in\Sigma^\omega$ 的真值定义为 $\|B\|(\sigma)=\sup\{\|B\|(\pi)|\pi$ 是模糊自动机 $B$ 在字符串 $\sigma$ 上的路径$\}$.

在文献[13,14]中,任意广义可能线性时序逻辑公式[9]存在一个与之有相同接受语言的模糊 Büchi 自动机. 由于模糊线性时序逻辑与广义可能线性时序逻辑有相同的语法. 因此可以得到下面的定理,其证明过程与文献[13]类似.

**定理 1** 设 $\varphi$ 是模糊线性时序逻辑公式,则存在模糊 Büchi 自动机 $B_\varphi=(Q,\Sigma,I,\delta,F)$ 使得对任意 $\sigma\in\Sigma^\omega$ 满足 $\|\varphi\|(\sigma)=\|B_\varphi\|(\sigma)$,其中 $Q$ 为有限状态集合,$\delta:Q\times\Sigma\times Q\to[0,1]$是模糊状态转移关系,$I$ 是初始状态集,$F$ 是接受状态集,且模糊 Büchi 自动机 $B_\varphi$ 的状态个数为$(2^{O(|\varphi|)})^2=2^{2O(|\varphi|)}$.

在本文中,用 Moore 机作为开放反应式系统的模型,下面给出 Moore 机的形式化定义.

**定义 3**[12] 基于输入字母表 $\Sigma_I$ 和输出字母表 $\Sigma_O$ 的 Moore 机是一个六元组 $M=(\Sigma_I,\Sigma_O,Q,q_0,\delta,\eta)$,其中 $Q$ 表示非空状态集,$q_0$ 表示初始状态,$\delta:Q\times\Sigma_I\to2^Q$ 为状态转移关系,$\eta:Q\to\Sigma_O$ 是状态输出函数.

给定输入序列 $i_0i_1i_2\cdots\in\Sigma_I^\omega$,则 Moore 机 $M$ 生成的无限字符串 $\sigma=(i_0\cup o_0)(i_1\cup o_1)(i_2\cup o_2)\cdots\in\Sigma^\omega$,其中

$o_j = \eta(\delta(i_0 i_1 \cdots i_{j-1}))$. $L(M)$表示由 Moore 机 $M$ 生成的所有无限字符串.

FLTL 公式阈值可实现性的定义如下.

**定义 4**　设 $\varphi$ 是 FCTL 公式,AP 是原子命题,$\lambda \in [0,1]$. 如果存在 Moore 机 $M$,使得由 $M$ 生成的无限字符串 $\sigma$ 满足 $\|\varphi\|(\sigma) \geqslant \lambda$,则称 FCTL 公式 $\varphi$ 是阈值 $\lambda$ 可实现的,且 Moore 机 $M$ 的构造过程称为 $\varphi$ 的阈值系统合成.

模糊线性时序逻辑公式 $\varphi$ 的系统合成可以表示为:构造系统 $M$,使得对任意 $\sigma \in L(M)$,满足 $\|\varphi\|(\sigma) \geqslant v$,其中 $v = \sup\{\lambda : \varphi$ 是阈值 $\lambda$ 可实现的$\}$.

从定义 4 中可知,FCTL 的阈值系统合成是找到一个满足条件的系统,而 FCTL 的系统合成却是在满足条件的系统中寻找最优系统.

## 4　模糊博弈理论

接受无限字符串的 $\omega$-自动机是一个五元组 $B = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \alpha)$,其中 $Q$ 表示非空有限状态集,$\Sigma$ 表示非空有限输入字母表,$Q_0$ 表示初始状态,$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ 为状态转移函数,$\alpha$ 是接收条件.

当 $\alpha \subseteq Q$ 时,称 $\omega$-自动机 $B$ 为非确定 Büchi 自动机. 当 $\alpha = (F_1, F_2, \cdots, F_d)$,其中 $F_1, F_2, \cdots, F_d$ 是状态集 $Q$ 的一个划分,称 $\omega$-自动机 $B$ 为非确定 Parity 自动机,称 $d$ 为 Parity 自动机的指数,记作 $\mathrm{index}(B) = d$. 当$|Q_0| = 1$ 且对任意 $q \in Q$ 和 $a \in \Sigma$,满足$|\delta(q,a)| \leqslant 1$ 时,称 $\omega$-自动机 $B$ 为确定有穷自动机.

对任意 $\sigma = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots \in \Sigma^\omega$,如果无穷状态序列 $\pi = q_0q_1q_2\cdots \in Q^\omega$ 满足 $\delta(q_j, \sigma_j) = q_{j+1}$,其中 $j \in \boldsymbol{N}$,则称 $\pi$ 是 $\omega$-自动机 $B$ 在无穷串 $\sigma$ 上的一条路径. Büchi 自动机接受路径 $\pi$ 的条件是 $\mathrm{Inft}(\pi) \cap F \neq \phi$;Parity 自动机接受路径 $\pi$ 的条件是 $\min\{t : \mathrm{Inft}(\pi) \cap F_t \neq \varnothing\}$ 是偶数.

如果路径 $\pi$ 满足接收条件,则称路径 $\pi$ 是被 $\omega$-自动机接收的一条路径. 非确定自动机接收字符串 $\sigma \in \Sigma^\omega$ 当且仅当在字符串 $\sigma$ 上至少存在一条可被接收的路径.

非确定 Büchi 有穷自动机比确定 Büchi 有穷自动机的表达能力强[15]. 下面定理说明非确定 Büchi 有穷自动机与确定 Parity 自动机有相同的表达能力,其中自动机的表达能力相同是指它们接受相同的语言.

**定理 2**[11]　设 $B$ 是非确定 Büchi 有穷自动机且状态个数为 $n$,则存在确定 Parity 有穷自动机 $P$,与 Büchi 有穷自动机 $B$ 有相同的接收语言,并且 Parity 自动机 $P$ 的状态个数为 $2^{O(n\log n)}$ 和 $\mathrm{index}(P) = n$.

本文的博弈模型是含有两个参与人的模糊 Büchi 博弈,特点是:在模糊 Büchi 博弈中的任意状态 $s$,局中人 1 先选择一个动作,然后局中人 2 选择另一个动作,且两个动作的选择相互独立,互不影响. 特别要指出的是,模糊 Büchi 自动机相当于只有一个参与人的模糊 Büchi 博弈. 模糊 Büchi 博弈的形式化定义如下.

**定义 5**　含有两个局中人的模糊 Büchi 博弈是一个八元组 $G = (S, \Sigma_I, \Sigma_O, \Gamma_1, \Gamma_2, s_0, \delta, F)$,其中:$S$ 是有限或可数状态集合;$\Sigma_I$ 和 $\Sigma_O$ 分别为局中人 1 和局中人 2 的动作集,且 $\Sigma_I \cap \Sigma_O = \varnothing$;$s_0$ 为初始状态; $\Gamma_1: S \rightarrow 2^{\Sigma_O}$, $\Gamma_2: S \rightarrow 2^{\Sigma_I}$分别表示对任意状态 $s \in S$,局中人 1 可用动作集为 $\Gamma_1(s) \subseteq \Sigma_O$,局中人 2 可用动作为 $\Gamma_2(s) \subseteq \Sigma_I$; $\delta: S \times \Sigma_O \times \Sigma_I \rightarrow F(S)$ 为模糊转移函数,对任意 $s \in S, o \in \Sigma_O, i \in \Sigma_I$,$\delta(s,o,i)$ 是状态 $S$ 上的模糊集,特别地,$\delta(s,o,i)(s')$ 表示为当前状态 $s$ 在局中人 1 的动作 $o$ 和局中人 2 的动作 $i$ 作用下转移到状态 $s'$的真值; $F \in 2^S$ 是模糊博弈取胜的 Büchi 条件.

若对任意 $s \in S, i \in \Gamma_1(s), o \in \Gamma_2(s)$, $|\mathrm{Supp}(\delta(s,o,i))| = 1$ 且转移函数 $\delta$ 是分明的,则称模糊 Büchi 博弈为分明的. 在模糊 Büchi 博弈 $G$ 中,若其中一个局中人在任意状态上的可用动作为空集时,则 $G$ 为模糊 Büchi 自动机. 若 $S$、$\Sigma_I$ 和 $\Sigma_O$ 都是有限集时,称 $G$ 为有限的. 有限模糊 Büchi 博弈 $G$ 的大小定义为 $|G| = |S| + \sum_{s\in S}\sum_{i\in\sum_I}\sum_{o\in\sum_o} |\mathrm{Supp}\delta(s,i,o)|$. 在本文中研究的模糊博弈为有限模糊 Büchi 博弈,且对任意 $s \in S$,存在 $i \in \Gamma_1(s), o \in \Gamma_2(s)$,满足$|\mathrm{Supp}\ (\delta(s,i,o))| > 0$.

在模糊博弈 $G$ 中,路径 $\pi$ 定义为 $\pi = s_0 \xrightarrow{o_0,i_0} s_1 \xrightarrow{o_1,i_1} s_2 \cdots \in (S \times \Sigma_O \times \Sigma_I)^\omega$,且对任意 $k \geqslant 0$, $s_k \in S$, $o_k \in \Gamma_1(s)$, $i_k \in \Gamma_2(s)$ 满足 $\delta(s_k, o_k, i_k)(s_{k+1}) > 0$. $\mathrm{Path}(G)$ 表示模糊博弈 $G$ 上的所有路径.

$\mathrm{Val}(\pi)$表示模糊博弈 $G$ 在路径 $\pi$ 中获胜的真值,定义如下:

$$\mathrm{Val}(\pi) = \begin{cases} \bigwedge_{j\geqslant 0}^{\infty} \delta(s_k, o_k, i_k)(s_{k+1}), & \mathrm{Inft}(\pi) \cap F \neq \varnothing; \\ 0, & \mathrm{Inft}(\pi) \cap F = \varnothing. \end{cases}$$

**注 1**　$G = (S, \Sigma_I, \Sigma_O, \Gamma_1, \Gamma_2, s_0, \delta, F)$ 是模糊博弈图,其中 $F$ 是模糊博弈获胜的 Büchi 条件. 当对 $G$ 中的任意一个状态,仅且只有一个局中人对应的动作集不为空时,模糊博弈图 $G$ 是文献[16]中的博弈图.

**注 2**　模糊博弈图 $G$ 是文献[17]中并发博弈图在模糊集上的推广,模糊博弈图具有不确定性和模糊性.

模糊博弈的路径与两个局中人选取的动作有关,局中人动作的选取称为策略(strategy),形式化定义为.

**定义 6**　设 $G = (S, \Sigma_I, \Sigma_O, \Gamma_1, \Gamma_2, s_0, \delta, F)$ 是模糊博弈,局中人 1 的策略是函数 $f: (S \times \Sigma_O \times \Sigma_I)^* \rightarrow \Sigma_O$,表示对模糊博弈 $G$ 中的有限路径指派一个动作. 类似的,局中人 2 的策略是 $g: (S \times \Sigma_O \times \Sigma_I)^* \rightarrow \Sigma_I$.

如果局中人的策略对于下一步动作的选取只依赖

于当前状态,且与历史状态无关,则称策略为无记忆策略. 形式化表示:局中人 1 的无记忆策略为 $f:S\to\Sigma_O$,局中人 2 的无记忆策略为 $g:S\to\Sigma_I$.

用 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 分别表示局中人 1 和局中人 2 的策略集合. 在有限模糊博弈 $G$ 中,局中人 1 和局中人 2 的无记忆策略集是有限的,且局中人 1 的无记忆策略的个数为 $|S\|\Sigma_O|$.

**定义 7** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,$\pi=s_0\xrightarrow{o_0,i_0}s_1\xrightarrow{o_1,i_1}s_2\cdots\in\mathrm{Path}(G)$,$f\in\Pi_1$,$g\in\Pi_2$,若 $s=s_0$ 和对任意自然数 $j$,使得 $f(\pi^j)=o_j\in\Gamma_1(s_j)$,$g(\pi^j)=i_j\in\Gamma_2(s_j)$ 满足 $\delta(s_j,o_j,i_j)(s_{j+1})>0$,则路径 $\pi\in\mathrm{outcome}(f,g)$,其中 $\pi^j=s_0\xrightarrow{o_0,i_0}s_1\xrightarrow{o_1,i_1}s_2\cdots s_j$ 表示路径 $\pi$ 第 $j$ 个位置处的前缀.

由定义 3.4 知 $\mathrm{outcome}(f,g)\subseteq\mathrm{Path}(G)$,则 outcome $(f,g)$ 的真值定义如下.

**定义 8** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,$f\in\Pi_1$ 和 $g\in\Pi_2$,在策略 $f$ 和 $g$ 作用下模糊博弈 $G$ 获胜的真值,记作 $\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))$,定义为 $\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))=\sup\{\mathrm{Val}(\pi):\pi\in\mathrm{outcome}(f,g)\}$.

在模糊博弈中,局中人 1 和局中人 2 处在对抗的环境中,局中人 1 目的是尽可能最大化其在这场博弈中获胜的真值,而局中人 2 的目的则相反. 局中人 1 和 2 在模糊博弈中获胜的真值定义如下.

**定义 9** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,对任意的 $f\in\Pi_1$,

(1) 局中人 1 在策略 $f$ 下获胜的真值,表示为 $\mathrm{Val}^1(f)$,定义为 $\mathrm{Val}^1(f)=\inf\{\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g)):g\in\Pi_2\}$.

(2) 在模糊博弈 $G$ 中,局中人 1 获胜的真值定义为 $V^1=\sup\{\mathrm{Val}^1(f):f\in\Pi_1\}$.

(3) 如果 $\mathrm{Val}^1(f)=V^1$,则称策略 $f$ 是局中人 1 在模糊博弈 $G$ 中的最优策略.

局中人 2 在模糊博弈的真值类似地定义如下:

**定义 10** 已知模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$,对任意的 $g\in\Pi_2$,

(1) 局中人 2 在策略 $g$ 下获胜的真值,用 $\mathrm{Val}^2(g)$ 表示,定义为 $\mathrm{Val}^2(g)=\sup\{\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g)):f\in\Pi_1\}$.

(2) 在模糊博弈 $G$ 中,局中人 2 获胜的真值定义为 $V^2=\inf\{\mathrm{Val}^2(g):g\in\Pi_2\}$.

(3) 如果 $\mathrm{Val}^2(g)=V^2$,则称策略 $g$ 是局中人 2 在模糊博弈 $G$ 中的最优策略.

在有限模糊博弈中,两个局中人在所有策略下获胜的真值为有限集.

**命题 1** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是有限模糊博弈,则函数 $\mathrm{Val}^t:\Pi_t\to[0,1]$ 是在模糊博弈 $G$ 中局中人 $t$ 的所有策略到 $[0,1]$ 上的一个映射,则 $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}^t)=\{r\in[0,1],\exists h\in\Pi_t,\mathrm{Val}^t(h)=r\}$ 是 $[0,1]$ 的有限子集,其中 $t=1,2$.

**证明** 已知模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是有限的,所以 $S\times\Sigma_I\times\Sigma_O\times S$ 是有限集,令 $X=\mathrm{Im}(\delta)$,显然 $X$ 为 $[0,1]$ 上的有限子集. 设 $f\in\Pi_1$ 和 $g\in\Pi_2$,路径 $\pi=s_0\xrightarrow{o_0,i_0}s_1\xrightarrow{o_1,i_1}s_2\cdots\in\mathrm{outcome}(f,g)$,若 $\mathrm{Inft}(\pi)\cap F\neq\varnothing$,则 $\mathrm{Val}(\pi)=\wedge_{j\geq 0}^{\infty}\delta(s_k,o_k,i_k)(s_{k+1})=^{\exists k}a_0\wedge\cdots\wedge a_{k-1}$,其中 $a_m\in[0,1]$,$m=0,1,\cdots,k-1$. 又因为 $\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))=\sup\{\mathrm{Val}(\pi):\pi$ 由策略 $f$ 和 $g$ 所产生的无限路径$\}=^{\exists d,k}(a_{10}\wedge\cdots\wedge a_{1k-1})\vee\cdots\vee(a_{d0}\wedge\cdots\wedge a_{dk-1})$,其中 $a_{hm}\in\mathrm{Im}(\delta)$,$h=1,\cdots,d$; $m=0,\cdots,k-1$. 注意到 $[0,1]$ 为线性格,取有限上界和下界不会产生新的元素,从而 $X\in\{0,1\}$ 也是 $[0,1]$ 的有限子集. 综上分析可知,$\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))\subseteq X\cup\{0,1\}$. 从而对任意的 $f\in\Pi_1$,$\mathrm{Val}^1(f)=\inf\{\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g)):g\in\Pi_2\}$,即 $\mathrm{Val}^1(f)\subseteq X\cup\{0,1\}$. 故 $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}^1)\subseteq X\cup\{0,1\}$,因此 $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}^1)$ 是 $[0,1]$ 的有限子集. 对任意 $g\in\Pi_2$,$\mathrm{Val}^2(g)=\sup\{\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g)):f\in\Pi_1\}\subseteq X\cup\{0,1\}$,则 $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}^2)\subseteq X\cup\{0,1\}$. 因此 $\mathrm{Im}(\mathrm{Val}^2)$ 是 $[0,1]$ 的有限子集. 证毕.

## 5 模糊线性时序逻辑的可实现性

为了研究模糊博弈的性质——局中人 1 存在最优无记忆策略,下面给出模糊博弈的水平集的定义,并讨论模糊博弈与其水平集的关系,进一步说明判断模糊线性时序逻辑可实现的时间复杂度.

**定义 11** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,$\lambda\in[0,1]$,则 $G$ 的 $\lambda$ - 水平集定义为 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta_\lambda,F)$,其中对任意 $s\in S$,$i\in\Sigma_I$,$o\in\Sigma_O$,$\delta_\lambda(s,o,i)=s$ 当且仅当 $\delta(s,o,i)(s')\geq\lambda$.

**注 3** 模糊博弈 $G$ 和其水平集 $G_\lambda$ 有相同的的状态个数.

**定理 3** 设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,$f\in\Pi_1$,$\lambda\in[0,1]$,则 $\mathrm{Val}^1(f)\geq\lambda$ 当且仅当在博弈 $G_\lambda$ 中,局中人 1 在策略 $f$ 作用下获胜.

**证明** 给定模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$,则对任意 $\lambda\in[0,1]$,水平集 $G_\lambda$ 的构造过程如定义 11 所示. 设 $f$ 是局中人 1 在模糊博弈 $G$ 中的策略且 $\mathrm{Val}^1(f)\geq\lambda$. 根据定义 10 可知,对局中人 2 的任意策略 $g$,满足 $\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))\geq\lambda$. 则存在路径 $\pi=s_0\xrightarrow{o_0,i_0}s_1\xrightarrow{o_1,i_1}s_2\cdots\in\mathrm{outcome}(f,g)$,满足 $\mathrm{Inft}(\pi)\cap F\neq\varnothing$,

$\mathrm{Val}(\pi)=\bigwedge_{j\geqslant 0}^{\infty}\delta(s_j,o_j,i_j)\ (s_{j+1})\geqslant\lambda$. 因此在路径 $\pi$ 中,对任意的 $j\geqslant 0$,$\delta(s_j,o_j,i_j)(s_{j+1})\geqslant\lambda$. 由定义 11 可知,对任意的 $j\geqslant 0$,$s_{j+1}=\delta(s_j,o_j,i_j)$. 若路径 $\pi$(outcome$(f,g)$ 且 $\mathrm{Val}(\pi)\geqslant\lambda$,则在博弈 $G_\lambda$ 中,路径 $\pi$ 是由策略 $f$ 作用下生成且满足博弈 $G_\lambda$ 的获胜条件. 由局中人 2 策略 $g$ 的任意性可知,在策略 $f$ 作用下局中人 1 在博弈 $G_\lambda$ 中获胜.

另一方面,设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,则对任意 $\lambda\in[0,1]$,$G_\lambda$ 是模糊博弈 $G$ 的水平集. 设 $f$ 是局中人 1 在博弈 $G_\lambda$ 中的胜出策略. 下证:在模糊博弈 $G$ 中,局中人 1 在策略 $f$ 的作用下胜出的真值不小于 $\lambda$,即 $\mathrm{Val}^1(f)\geqslant\lambda$.

设 $g$ 是局中人 2 在博弈 $G_\lambda$ 中的任意一个策略,路径 $\pi$ 是由策略 $f$ 和 $g$ 生成的,则路径 $\pi$ 满足博弈 $G_\lambda$ 的获胜条件. 则由定义 11 知,$\pi\in\mathrm{outcome}(f,g)$ 且 $\pi$ 的每一步转移值大于等于 $\lambda$. 因此路径 $\pi$ 获胜的真值大于等于 $\lambda$,从而 $\mathrm{Val}(\mathrm{outcome}(f,g))\geqslant\mathrm{Val}(\pi)\geqslant\lambda$,由策略 $g$ 的任意性可知 $\mathrm{Val}^1(f)\geqslant\lambda$ 成立. 证毕.

由命题 1 和定理 3 可以得到下面的定理.

**定理 4**　设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,则存在有限个经典博弈 $G_\lambda$,使得 $V^1=\max\{\lambda$:在博弈 $G_\lambda$ 中局中人 1 存在获胜的策略$\}$,其中 $\lambda\in[0,1]$.

在经典(Büchi,Parity)博弈中,两个局中人是否存在胜出的无记忆策略可以在多项式时间内判定[11]. 由推论 1 可知,本文的模糊博弈也有类似的结论.

**定理 5**　设 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$ 是模糊博弈,则判断局中人 1 在模糊博弈 $G$ 中是否存在最优策略的时间复杂度为 $O(|S\|\Sigma_I\|\Sigma_O|\log|G|)$.

**证明**　给定模糊博弈 $G$,由命题 1 知,集合 $\{\mathrm{Val}^1(f):f\in\Pi_1\}$ 是有限集,且集合 $\{\mathrm{Val}^1(f):f\in\Pi_1\}$ 的元素个数最多为 $|G|$. 由算法 1 知,最多需要 $\log|G|$ 步才能找到最大的 $\lambda\in\{\mathrm{Val}^1(f):f\in\Pi_1\}$,使得局中人 1 在博弈 $G_\lambda$ 中胜出. 对于任意 $\lambda\in\{\mathrm{Val}^1(f):f\in\Pi_1\}$,判断局中人 1 在博弈 $G_\lambda$ 中是否存在胜出的策略时间复杂度[11]为 $O(|S\|\Sigma_I\|\Sigma_O|)$. 因此,判断局中人 1 在模糊博弈 $G$ 中是否存在最优无记忆策略的时间复杂度为 $O(|S\|\Sigma_I\|\Sigma_O|\log|G|)$. 证毕.

**算法 1　计算局中人 1 在模糊博弈 G 中取胜的真值**

**输入**:模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$;

**输出**:$V_1=\max\{\lambda$:局中人 1 在 $G_\lambda$ 中存在胜出的策略 $f\}$;

```
X←Im(δ);          \ X 是由 G 中转移函数的像集组成的集合.
X←Sort(X);        \ 对 X 排序.
n←length. X;      \ n 表示 X 在元素的个数.
F(X,s_0 ∈ Win_1(G_λ));
if n = 1
    return F(X,s_0 ∈ Win_1(G_λ));
else
    i = ⌊n/2⌋;        \⌊n/2⌋表示小于或者等于 n/2 的最大整数.
    if s_0 ∈ Win_1(G_i);
        return F(X[i,n],s_0 ∈ Win_1(G_λ));
    else
        return F(X[1,i],s_0 ∈ Win_1(G_λ));
    end if
end if
```

下面定理给出模糊线性时序逻辑的阈值可实现性的验证过程,并讨论验证过程的时间复杂度.

**定理 6**　设 $\varphi$ 为模糊线性时序逻辑公式,AP 是原子命题,$I$、$O$ 是原子命题集 AP 的一个划分,$\lambda\in[0,1]$. 则 $\varphi$ 的阈值可实现性是 2Exptime 完全的,即时间复杂度为 $2^{2^{2O(|\varphi|)}}$.

**证明**　给定 FCTL 公式 $\varphi$,且 $|\varphi|=n$. AP 是原子命题,$I$、$O$ 是 AP 的一个划分,即 $\mathrm{AP}=I\cup O$ 且 $I\cap O=\varnothing$. 由定理 1 知,存在模糊 Büchi 自动机 $B_\varphi=(\Sigma,Q,I,\delta,F)$,对任意 $\sigma\in\Sigma^\omega$ 满足 $\|\varphi\|(\sigma)=\|B_\varphi\|(\sigma)$ 且 $|Q|=2^{2O(n)}$. 则构造含有两个局中人的模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$,其中 $S=Q$;对任意 $s\in S$,$\Gamma_1(s)=\{o|\exists i\in\Sigma_I,\exists s'\in S,\delta(s,o,i)\ (s')>0\}$,$\Gamma_2(s)=\{i|\exists o\in\Sigma_O,\exists s'\in S,\delta(s,o,i)\ (s')>0\}$;对任意 $s\in S$,$i\ \exists i\in\Sigma_I,o\in\Sigma_O,\eta(s,o,i)=\delta(s,o\cup i)$;$\{s_0\}=I$.

在模糊博弈 $G$ 中,局中人 1 代表系统,动作集为 $\Sigma_O$,局中人 2 代表环境,动作集为 $\Sigma_I$. 对任意 $\lambda\in[0,1]$,构造 $\lambda$-水平集 $G_\lambda$,状态个数为 $2^{2O(n)}$. 则存在一个与 $\lambda$-水平集 $G_\lambda$ 等价的确定的 Parity 博弈 $D_\lambda$[10],其状态个数最多为 $2^{2^{2O(n)}\log 2^{2O(n)}}=2^{O(n)2^{2O(n)}}=2^{2^{2O(n)}}$,指数为 $2^{2O(n)}$.

在确定 Parity 博弈 $D_\lambda$ 中,有且仅有一个局中人存在获胜的无记忆策略,而局中人 1 获胜的无记忆策略相对应于一个 Moore 机 $M$,使得对任意 $\sigma\in L(M)$ 满足 $\|\varphi\|(\sigma)\geqslant\lambda$. 另外在 Parity 博弈[16]中,判断局中人 1 是否存在获胜无记忆策略的时间复杂度为 $2^{O(n)2^{2O(n)}}=2^{2^{2O(n)}}$. 证毕.

**定理 7**　设 $\varphi$ 为模糊线性时序逻辑公式,AP 是有限原子命题,$I$、$O$ 是原子命题集 AP 的一个划分,即 $\mathrm{AP}=I\cup O$ 且 $I\cap O=\varnothing$. 则模糊线性时序逻辑公式 $\varphi$ 的可实现性是 2Exptime-完全,即判断 $\varphi$ 的可实现性的时间复杂度为 $2^{2^{2O(n)}}$.

**证明**　给定有限原子命题 AP 上的模糊线性时序逻辑公式 $\varphi$,其中 $I,O$ 为 AP 的一个划分,且 $|\varphi|=n$. 由定理 4.3 知,由 FCTL 公式 $\varphi$ 可以构造一个含有两个局中人的模糊博弈 $G=(S,\Sigma_I,\Sigma_O,\Gamma_1,\Gamma_2,s_0,\delta,F)$,且 $G$ 是有限模糊博弈. 根据推论 1,局中人 1 在模糊博弈 $G$ 中胜出的真值可以表示为 $V^1=\max\{\lambda$:局中人 1 在博弈

$G_\lambda$ 中存在获胜的策略，$\lambda \in [0,1]\}$. 根据定理 4.3 可知，有限原子命题上的模糊线性时序逻辑的系统合成问题的时间复杂度为 $2^{2^{2O(|\varphi|)}}$. 证毕.

## 6 结论

为了研究模糊线性时序逻辑的可实现性和系统合成，本文首先引入了模糊博弈的定义，并且研究了模糊博弈的性质-最优无记忆策略的存在性. 然后分析了判断最优无记忆策略是否存在的时间复杂度. 最后研究了模糊线性时序逻辑的阈值可实现性，并说明了其时间复杂度是 2Exptime 完全的.

### 参考文献


[1] Christe B, Joost P K. Principles of Model Checking[M]. Cambridge: The MIT Press, 2008.

[2] Pnueli A, Rosner R. On the synthesis of a reactive module [A]. Proceeding. POPL'89 Proceedings of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages[C]. New York: IEEE, 1989. 179 – 190.

[3] Almagor S, Boker U, Kupferman O. Formalizing and reasoning about quality[A]. Automata, Languages, and Programming, ICALP 2013. Lecture Notes in Computer Science[C]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. 15 – 27.

[4] 林慧民，张文辉. 模型检测：理论、方法与应用[J]. 电子学报，2002，36(12A)：1907 – 1912.
LIN Hui-min, ZHANG Wen-hui. Model checking: theories, techniques and applications[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 36(12A): 1907 – 1912. (in Chinese)

[5] Zadeh L A. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems [M]. London: World Scientific Press, 1996.

[6] Seong-ick M, Ko-Hsin L, Doheo L. Fuzzy branching temporal logic[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2004, 34 (2): 1045 – 1055.

[7] Subhankar M, Pallab D. A fuzzy real-time temporal logic [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(9): 1452 – 147 0.

[8] Pan H Y, Li Y M, Cao Y Z, Ma Z Y. Model checking fuzzy computation tree logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 262(C): 60 – 77.

[9] Li Y M. Quantitative model checking of linear-time properties based on generalized possibility measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 320(C): 17 – 39.

[10] Krzysztif R A, Erich G. Lectures in Game Theory for Computer Scientists[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[11] Erich G, Wolfgang T, Thomas W. Automata, Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research[M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[12] 李永明，李平. 模糊计算理论[M]. 北京：科学出版社，2016.

[13] 李永明. 可能 LTL 模型检测的两种方法[J]. 陕西师范大学学报，2014，42(6)：21 – 25.
LI Y M. Two methods of possibility LTL model checking [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 2014, 42(6): 21 – 25. (in Chinese)

[14] Kupferman O, Lustig Y. Lattice automata[A]. Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. VMCAI 2007. Lecture Notes in Computer Science[C]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 199 – 213.

[15] Sven S. Solving parity games in big steps[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2017, 84(C): 243 – 262.

[16] Pan H Y, Li Y M, Cao Y Z, Li D C. Reachability in fuzzy game graphs[J/OL]. IEEE Transcations on Fuzzy Systems, http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2016.2593495, 2016.

[17] Lucada, Thomas A H. Concurrent omega-regular games [A]. Proceedings 15th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science[C]. USA: IEEE, 2000. 26 – 28.


### 作者简介


**范艳焕** 女，1987 年生于河南商丘. 现为陕西师范大学计算机科学学院博士研究生. 主要研究方向定量模型检测.
E-mail: fan.fan1222@163.com

**李永明(通信作者)** 男，1966 年生于陕西西安. 现为陕西师范大学教授、博士生导师. 主要研究方向为定量模型检测、非经典计算理论、模糊系统分析、量子逻辑与量子计算.
E-mail: liyongm@snnu.edu.cn